CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII-a

Subiectul 1

Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2020 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbf{R}$ şi mulţimea $G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in M$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

c) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

Barem

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \begin{pmatrix} 2020 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\ A_0 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow I_3 \in G$$ **1p**

b) $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2020^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2020^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2020^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$

$= A_{x+y}, \forall x, y \in R$ **2p**

c) Conform punctului b) $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in$ G, $\forall x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow$ G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu “·”.

G1) Asociativitatea . Înmulţirea matricelor pe mulţimea G este asociativă deoarece este operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_3(R)$.

G2) Comutativitatea: $\forall A_x, A_y \in G, A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$

$$\left.\begin{array}{l} A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R} \\ A_y \cdot A_x = A_{y+x} = A_{x+y} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{“· “ comutativă.}$$

G3) Elementul neutru:

$\exists A_0 = I_3 \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_0 = A_0 \cdot A_x = A_x, \forall A_x \in G \Rightarrow A_0$ element neutru.

G4) Elementele simetrizabile:

$\forall A_x \in G, \exists A_{x'} \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3$

$A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3 \Leftrightarrow A_{x+x'} = A_{x'+x} = A_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2020^{x+x'} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+x' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2020 = 0 \\ x + x' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x' = -x \Rightarrow$

$A_{x'} = A_{-x} \in G$ este simetricul lui A_x. **4p**

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea

Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax**: +40 (0) 359 43 62 07,

Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,

Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a XII-a**

Subiectul 2

Se consideră funcţiile $f,g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to \boldsymbol{R}$, definite prin $f(x)=\frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}$ şi $g(x)=\frac{\sin x}{e^x+\cos x+\sin x}$.

a) Să se calculeze $\int[f(x)+g(x)]dx$ şi $\int[f(x)-g(x)]dx$.

b) Să se arate că funcţiile f şi g admit primitive şi să se calculeze primitivele acestora.

Barem

a) Funcţiile f şi g sunt continue , deci şi funcţiile $f+g$, respectiv $f-g$ sunt tot continue, de unde rezulta că f, g, $f+g$, $f-g$ admit primitive pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **(1p)**

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int\left(\frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}+\frac{\sin x}{e^x+\cos x+\sin x}\right)dx=\int dx=x+c$$

(2p)

$$\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int\left(\frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}-\frac{\sin x}{e^x+\cos x+\sin x}\right)dx=\int\frac{\left(e^x+\cos x+\sin x\right)'}{e^x+\cos x+\sin x}=$$ **(2p)**

$$=\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right)+c$$

b) Notăm cu $I=\int f(x)dx$ şi $J=\int g(x)dx$. In aceste condiţii, din a) rezultă

$$\begin{cases} I+J=x \\ I-J=\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right)\right)+c_1 \\ J=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right)\right)+c_2 \end{cases}$$

, unde $c_1,c_2\in\boldsymbol{R}$. **(2p)**

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax**: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a XII-a**

Subiectul 3

Pe **R** se defineşte legea de compziţie "*"astfel: $x * y = ax + by + c, \forall x, y \in \mathbf{R}$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Determinaţi constantele a, b, c ştiind că $(\mathbf{R}, *)$ este grup cu elementul neutru 3.

Barem

$x \circ 3 = 3 \circ x = x, \forall x \in \mathbf{R}$ (**1p**). Pentru x=0 obţinem $3b + c = 0$ şi $3a + c = 0$ (**2p**) $\Rightarrow a = b$ (**1p**). Pentru x=1 obţinem $a + 3b + c = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$ (**2p**) $\Rightarrow c = -2$ (**1p**).

Subiectul 4

Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{15x\sqrt{x+1}}{2}$. Să se determine a,b,c astfel încât funcţia $F : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x+1}$ să fie o primitivă a lui f .

Barem

$F'(x) = f(x), \forall x > -1$ **(1p)**

$$(2ax + b)\sqrt{x+1} + \frac{ax^2 + bx + c}{2\sqrt{x+1}} = \frac{15x\sqrt{x+1}}{2}, \forall x > -1 \quad \textbf{(2p)}$$

$$(15a - 15)x^2 + (4a + 3b - 15)x + 2b + c = 0, \forall x > -1. \quad \textbf{(1p)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - 15 = 0 \\ 4a + 3b - 15 = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1p)} \Rightarrow a = 3, b = 1, c = -2. \quad \textbf{(2p)}$$

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax**: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro